

大學入學考試中心
110 學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定劃記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，恐將影響成績並損及權益。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 劃記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^- 與第 21 列的 \square^7 劃記，如：

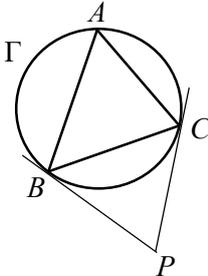
20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。若 $A^4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則 $a+b+c+d$ 之值為下列哪一個選項？
(1) 158 (2) 162 (3) 166 (4) 170 (5) 174
2. 五項實數數列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的每一項都大於 1，且每相鄰的兩項中，都有一數是另一數的兩倍。若 $a_1 = \log_{10} 36$ ，則 a_5 有多少種可能的值？
(1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 7 (5) 8
3. 如圖， $\triangle ABC$ 為銳角三角形， P 為 $\triangle ABC$ 外接圓 Γ 外的一點，且 \overline{PB} 與 \overline{PC} 都與圓 Γ 相切。設 $\angle BPC = \theta$ ，試問 $\cos A$ 的值為下列哪一個選項？
(1) $\sin 2\theta$ (2) $\frac{\sin \theta}{2}$ (3) $\sin \frac{\theta}{2}$
(4) $\frac{\cos \theta}{2}$ (5) $\cos \frac{\theta}{2}$
- 
4. 設 \vec{a} 與 \vec{b} 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？
(1) 8 (2) 9 (3) 12 (4) 13.5 (5) 16

5. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數，滿足 $(x+1)f(x)$ 除以 x^3+2 的餘式為 $x+2$ 。
若 $f(0)=4$ ，則 $f(2)$ 的值為下列哪一個選項？
(1) 8 (2) 10 (3) 15 (4) 18 (5) 20
6. 坐標平面上有一邊長為 3 的正六邊形 $ABCDEF$ ，其中 $A(3,0), D(-3,0)$ 。試問橢圓
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 與正六邊形 $ABCDEF$ 有多少個交點？
(1) 0 (2) 2 (3) 4 (4) 6 (5) 8

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 心理學家找了 1000 位受試者進行暗室實驗，每位受試者都要觀看及辨識 6、8、9 三張數字卡，發現將實際數字看成某個數字的機率如下表：

看成數字 實際數字	6	8	9	其他
6	0.4	0.3	0.2	0.1
8	0.3	0.4	0.1	0.2
9	0.2	0.2	0.5	0.1

例如：實際數字 6 被看成 6、8、9 的機率分別為 0.4、0.3、0.2，而被看成其他數字的機率是 0.1。根據上述實驗結果，試選出正確的選項。

- (1) 如果實際數字是 8，則至少有一半的可能性會被看成是 8
(2) 如果實際數字是 6，則有六成的可能性會被看成不是 6
(3) 在 6、8、9 三數字中，被誤認的可能性以 9 最低
(4) 如果被看成的數字是 6，則實際上就是 6 的可能性不到一半
(5) 如果被看成的數字是 9，則實際上就是 9 的可能性超過 $\frac{2}{3}$

8. 如圖， L 為坐標平面上通過原點 O 的直線， Γ 是以 O 為圓心的圓，且 L 與 Γ 有一個交點 $A(3,4)$ 。已知 B, C 為 Γ 上的相異兩點滿足 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$ 。試選出正確的選項。

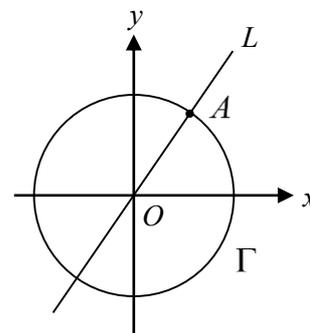
(1) L 與 Γ 的另一個交點為 $(-4,-3)$

(2) 直線 BC 的斜率為 $\frac{3}{4}$

(3) $\angle AOC = 60^\circ$

(4) $\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$

(5) B 與 C 在同一象限內



9. 某村的村長選舉設有兩個投票所。已知兩位候選人在各投票所得到的有效票數比例如下表（廢票不列入計算）：

	甲候選人	乙候選人
第一投票所	40%	60%
第二投票所	55%	45%

假設第一投票所與第二投票所的有效票數分別為 x 與 y （其中 $x > 0, y > 0$ ），且以總得票數較高者為當選人。根據上述表格，試選出正確的選項。

(1) 當有效票數的總和 $x+y$ 已知時，就可決定當選人

(2) 當 $x:y$ 的比值小於 $\frac{1}{2}$ 時，就可決定當選人

(3) 當 $x > y$ 時，就可決定當選人

(4) 當甲候選人在第一投票所的有效票數比在第二投票所的有效票數多時，就可決定當選人

(5) 當乙候選人在第二投票所的有效票數比在第一投票所的有效票數多時，就可決定當選人

10. 在 $\triangle ABC$ 中，已經知道 $\overline{AB}=4$ 和 $\overline{AC}=6$ ，此時尚不足以確定 $\triangle ABC$ 的形狀與大小。但是，只要再知道某些條件（例如：再知道 \overline{BC} 的長度），就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小。試選出正確的選項。

- (1) 如果再知道 $\cos A$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (2) 如果再知道 $\cos B$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (3) 如果再知道 $\cos C$ 的值，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (4) 如果再知道 $\triangle ABC$ 的面積，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小
- (5) 如果再知道 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑，就可確定 $\triangle ABC$ 唯一的形狀與大小

11. 平面上有一梯形 $ABCD$ ，其上底 $\overline{AB}=10$ 、下底 $\overline{CD}=15$ ，且腰長 $\overline{AD}=\overline{BC}+1$ 。試選出正確的選項。

- (1) $\angle A > \angle B$
- (2) $\angle B + \angle D < 180^\circ$
- (3) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$
- (4) \overline{BC} 的長可能是 2
- (5) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} < 30$

12. 設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X|Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

- (1) $P(A) > P(B)$
- (2) $P(C) = \frac{2}{7}$
- (3) $2P(C|A) + 5P(C|B) < 2$
- (4) $P(C|A) > 0.2$
- (5) $P(C|B) > 0.3$

13. 設多項式函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ，其中 a, b, c 均為有理數。試選出正確的選項。
- (1) 函數 $y = f(x)$ 與拋物線 $y = x^2 + 100$ 的圖形可能沒有交點
 - (2) 若 $f(0)f(1) < 0 < f(0)f(2)$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 必有三個相異實根
 - (3) 若 $1 + 3i$ 是方程式 $f(x) = 0$ 的複數根，則方程式 $f(x) = 0$ 有一個有理根
 - (4) 存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等差數列
 - (5) 存在有理數 a, b, c 使得 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 依序形成等比數列

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（14-32）
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 某機器貓從數線上原點位置朝數線的正向移動，其移動方式如下：以 8 秒為一週期，每一週期先以每秒 4 單位長等速度移動 6 秒，再休息 2 秒。如此繼續下去，則此機器貓在開始移動後 14 15 秒會抵達數線上坐標為 116 的位置。

- B. 坐標空間中有兩條直線 L_1, L_2 與一平面 E ，其中直線 $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-5}$ ，而 L_2 的

參數式為 $\begin{cases} x=1 \\ y=1+2t \\ z=1+3t \end{cases}$ (t 為實數)。若 L_1 落在 E 上，且 L_2 與 E 不相交，則 E 的方程

式為 $x - \underline{16} y + \underline{17} z = \underline{18}$ 。

- C. 從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 這九個數中任意取出三個相異的數，每數被取出的機率皆相等，則三數乘積是一完全平方數的機率為 $\frac{\underline{19}}{\underline{20} \underline{21}}$ 。（化成最簡分數）

D. 在坐標平面上， Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1,1)$ ，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y=a \times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為 ②② ②③ $\leq a \leq$ ②④。

E. 將 $(\sqrt[3]{49})^{100}$ 寫成科學記號 $(\sqrt[3]{49})^{100} = a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ，且 n 為正整數。若 a 的整數部分為 m ，則數對 $(m,n) = ($ ②⑤ $,$ ②⑥ ②⑦ $)$ 。

F. 如圖，機器人在地面上從一點 P 出發，按照以下規則移動：先朝某方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45° ；朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90° ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向逆時針旋轉 45° ；再朝新方向前進一公尺後，依前進方向順時針旋轉 90° ， \dots ，以此類推。已知機器人移動的路徑會形成一個封閉區域，則此封閉區域的面積為 ②⑧ + ②⑨ $\sqrt{\textcircled{30}}$ 平方公尺。(化成最簡根式)



G. 在四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 4\sqrt{6}$ 、 $\overline{BD} = \overline{CD} = 8$ ，且 $\cos \angle BAC = \frac{1}{3}$ ，則點 D 到平面 ABC 的距離為 ③① $\sqrt{\textcircled{32}}$ 。(化成最簡根式)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

$$\text{標準差 } \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\sqrt{7} \approx 2.646$, $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$, $\log_{10} 3 \approx 0.4771$, $\log_{10} 5 \approx 0.6990$, $\log_{10} 7 \approx 0.8451$

8. 角錐體積 = $\frac{1}{3}$ (底面積 \times 高)